Spojená škola Pankúchova 6, Bratislava 5, 851 04

Školský vzdelávací program

International Baccalaureate- Diploma Programme
(Gymnázium 4. – 5. ročník)

Matematika – Analýza a prístupy

(štandardná úroveň - SL , vyššia úroveň - HL)

Spojená škola Pankúchova 6, Bratislava 5, 851 04

Názov predmetu	**Matematika – Analýza a prístupy**
Časový rozsah výučby	I.DP (gymnázium 4.roč) II.DP (gymnázium 5.roč.) HL: 6 hod. týždenne/ 320 hod. SL: 4 hod. týždenne/ 200 hod.
Názov školy	Spojená škola Pankúchova 6,Bratislava5, 85104
Názov ŠkVP	IB Diploma Programme
Kód a názov študijného odboru	7902J74-gymnázium -bilingválne štúdium
Forma štúdia	denná
Vyučovací jazyk	Anglický jazyk

Charakteristika učebného predmetu Matematika: analýza a prístupy (Mathematics: Analysis and Approaches) v programe IB Diploma Programme (DP)

Predmet Matematika: analýza a prístupy (Mathematics: Analysis and Approaches) v programe International Baccalaureate Diploma Programme (IB DP) patrí do vzdelávacej oblasti matematika/ Mathematics (group 5) a predstavuje akademicky náročný predmet zameraný na rozvoj matematického myslenia, analytickej presnosti a hlbokého porozumenia matematickým konceptom. Štúdium predmetu podporuje systematické budovanie poznatkov v oblastiach čísla a algebra, funkcie, geometria a trigonometria, štatistika a pravdepodobnosť a diferenciálny a integrálny počet, pričom dôraz sa kladie na logické uvažovanie, abstrakciu, zovšeobecňovanie a tvorbu korektných matematických argumentov.

Učebný predmet je koncipovaný v súlade s filozofiou International Baccalaureate, ktorá podporuje rozvoj zvedavých, premýšľajúcich a medzinárodne zmýšľajúcich žiakov pripravených zodpovedne pristupovať k riešeniu problémov v lokálnom aj globálnom kontexte. Matematika: analýza a prístupy vedie žiakov k tomu, aby matematiku nevnímali iba ako súbor postupov, ale ako koherentný systém myšlienok, vzťahov a štruktúr, ktorý umožňuje presne opisovať, analyzovať a interpretovať javy v abstraktných aj reálnych situáciách.

Predmet kladie silný dôraz na schopnosť konštruovať, komunikovať a zdôvodňovať správne matematické postupy a závery. Žiaci sú vedení k riešeniu rutinných aj nerutinných úloh, k využívaniu matematických modelov, k prepájaniu poznatkov z rôznych tematických oblastí a k používaniu vhodných technológií pri skúmaní matematických problémov a overovaní výsledkov.

Dôležitou súčasťou predmetu je rozvoj bádateľských, problémovo orientovaných a modelovacích zručností, ako aj samostatné matematické skúmanie. Interné hodnotenie vo forme matematického výskumu (mathematical exploration) umožňuje žiakom preukázať schopnosť aplikovať matematické vedomosti a zručnosti pri spracovaní témy podľa vlastného záujmu, rozvíjať nezávislosť v učení a hlbšie preniknúť do vybranej oblasti matematiky mimo časových obmedzení písomných skúšok.

V programe IB DP sa predmet vyučuje na dvoch úrovniach náročnosti — štandardná úroveň (standard level - SL) a vyššia úroveň (higher level - HL). Štandardná úroveň poskytuje žiakom pevný základ v kľúčových matematických oblastiach a rozvíja základné i pokročilejšie matematické kompetencie, zatiaľ čo vyššia úroveň ponúka hlbšie a rozsiahlejšie

štúdium matematického obsahu, určené najmä žiakom so záujmom o ďalšie štúdium odborov s výrazným matematickým zameraním.

Vzdelávanie v tomto predmete rozvíja nielen matematické vedomosti a techniky, ale aj vytrvalosť, presnosť, tvorivé a logické myslenie, schopnosť reflektovať vlastnú prácu i prácu iných a uvedomovať si význam matematiky v historickom, medzinárodnom a multikultúrnom kontexte. Výučba zároveň podporuje samostatnú prácu žiakov, rozvoj akademických zručností a schopnosť jasne, presne a odborne komunikovať matematické myšlienky.

Absolvent predmetu Matematika: analýza a prístupy (Mathematics: Analysis and Approaches) disponuje vedomosťami a zručnosťami, ktoré mu umožňujú úspešne pokračovať v ďalšom štúdiu najmä v oblastiach matematiky, prírodných vied, techniky, informatiky, ekonómie a ďalších odborov vyžadujúcich vysokú mieru analytického a abstraktného myslenia.

Ciele učebného predmetu Matematika: analýza a prístupy (Mathematics: Analysis and Approaches) v programe IB Diploma Programme (DP)

Vyučovací predmet Matematika: analýza a prístupy (Mathematics: Analysis and Approaches) v programe International Baccalaureate Diploma Programme (IB DP) smeruje k rozvoju matematicky gramotného, analyticky mysliaceho a intelektuálne samostatného absolventa. Predmet umožňuje žiakom porozumieť základným konceptom, princípom a povahe matematiky a zároveň rozvíja schopnosť aplikovať matematické poznatky pri riešení abstraktných aj reálnych problémov v rôznych kontextoch. Vzdelávanie v predmete Matematika: analýza a prístupy sleduje tieto ciele:

1. Rozvíjať zvedavosť a pozitívny vzťah k matematike a viesť žiakov k oceneniu jej elegancie a sily.
2. Rozvíjať porozumenie matematickým konceptom, princípom a povahe matematiky.
3. Rozvíjať schopnosť jasne, stručne a sebaisto komunikovať matematické myšlienky v rôznych kontextoch.
4. Rozvíjať logické a tvorivé myslenie, ako aj trpezlivosť a vytrvalosť pri riešení problémov tak, aby si žiaci budovali istotu pri práci s matematikou.
5. Rozvíjať a zdokonaľovať schopnosť abstrakcie a zovšeobecňovania.
6. Podporovať schopnosť aplikovať a prenášať matematické zručnosti do nových situácií, do iných oblastí poznania a do budúceho pôsobenia v lokálnych aj globálnych komunitách.
7. Prehlbovať porozumenie vzájomnému vzťahu medzi rozvojom technológií a rozvojom matematiky.
8. Rozvíjať povedomie o morálnych, sociálnych a etických otázkach vyplývajúcich z práce matematikov a z aplikácií matematiky.
9. Viesť žiakov k oceneniu univerzálnosti matematiky a jej multikultúrnych, medzinárodných a historických perspektív.
10. Rozvíjať porozumenie prínosu matematiky pre iné vedné disciplíny a jej postavenia ako osobitnej oblasti poznania v predmete teória poznania / Theory of Knowledge.

11. Rozvíjať schopnosť kriticky reflektovať vlastnú prácu aj prácu iných.

12. Podporovať samostatné aj spolupracujúce rozširovanie matematického porozumenia.

Profil absolventa predmetu Matematika

Absolvent predmetu **Matematika** v programe IB Diploma Programme má rozvinuté analytické myslenie, presnosť, logické uvažovanie a schopnosť komunikovať matematické argumenty v rôznych kontextoch (contexts). Program zároveň podporuje riešenie problémov (problem solving), modelovanie (modelling), skúmanie (inquiry), využívanie technológií a schopnosť prenášať matematické poznatky do reálnych situácií a ďalších oblastí poznania.

Obsah učebného predmetu Matematika v IB DP
Obsah predmetu Matematika v programe IB Diploma Programme je rozdelený do piatich tematických celkov: 1. čísla a algebra (Number and algebra), 2. funkcie (Functions), 3. geometria a trigonometria (Geometry and trigonometry), 4. štatistika a pravdepodobnosť (Statistics and probability) a 5. diferenciálny a integrálny počet (Calculus). Súčasťou kurikula je aj toolkit and the mathematical exploration, teda rozvoj investigatívnych, problémovo-orientovaných a modelovacích zručností smerujúcich k individuálnej matematickej explorácii.

Tematický celok 1 — Čísla a algebra (Number and algebra)
- SL: 26 hod. / HL 52 hod.

- číselné sústavy, presnosť a zápis v štandardnom tvare,
- postupnosti a rady,
- mocniny a logaritmy,
- **permutácie a kombinácie (iba HL),**
- binomická veta,
- **komplexné čísla** (HL),
- dôkazy, **vrátane dôkazu indukciou a dôkazu sporom (HL),**
- **sústavy troch rovníc** (HL).

Tematický celok 2 — Funkcie (Functions)
– SL: 28 hod. / HL 43 hod.

- základné typy funkcií a ich grafy,
- lineárne, kvadratické**, polynomické,** racionálne, exponenciálne a logaritmické funkcie,
- transformácie grafov,
- zložené a inverzné funkcie,
- riešenie rovníc a nerovníc pomocou funkcií.

Tematický celok 3 — Geometria a trigonometria (Geometry and trigonometry)
- SL: 33 hod. / HL 68 hod.

Zahŕňa najmä:

- riešenie trojuholníkov,
- trigonometrické funkcie a ich grafy,
- trigonometrické identity,
- trigonometrické rovnice,
- **vektory,**
- **priestorovú geometriu, priamky a roviny,**
- **uhly a vzdialenosti v priestore.**

Tematický celok 4 — Štatistika a pravdepodobnosť (Statistics and probability) - SL: 36 hod. / HL 44 hod.

- opisnú štatistiku, priemer a miery rozptylu,
- koreláciu a regresiu,
- výberové metódy,
- pravdepodobnostné zápisy a výpočty,
- stromy možností a Vennove diagramy,
- diskrétne pravdepodobnostné rozdelenia,
- binomické a normálne rozdelenie.

Tematický celok 5 — Diferenciálny a integrálny počet (Calculus) - SL: 37 hod. / HL 73 hod.

- limity a kontinuitu,
- deriváciu z prvých princípov,
- pravidlá derivovania,
- aplikácie derivácie,
- integrály, určité aj neurčité,
- aplikácie integrácie.
- **diferenciálne rovnice,**
- **Maclaurinove rady.**

Matematické zručnosti a výskumná práca - SL: 40 hod. / HL 40 hod.

Tento prvok kurikula rozvíja:

- investigatívne zručnosti,
- schopnosť riešiť problémy,
- modelovanie,
- práca s technológiami,
- samostatnú písomnú exploráciu matematickej oblasti.

Tematický celok 1 — Čísla a algebra (Number and algebra)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
SL 1.1	• Operácie s číslami v tvare $a \times 10^k$, kde $1 \leq a < 10$ a $k \in \mathbb{Z}$. • Zápis veľmi veľkých a veľmi malých čísel v štandardnom tvare. • - Zákaz kalkulačného alebo počítačového zápisu typu $5.2E30$.	Žiak vie: • zapisovať čísla v štandardnom tvare. • prepisovať čísla medzi bežným zápisom a vedeckým zápisom. • pracovať s veľmi veľkými a veľmi malými číslami v kontextoch ako astronomické vzdialenosti, subatomárne častice, finančné údaje alebo merania v prírodných vedách. • - rozlišovať vhodný zápis čísla podľa situácie a presnosti.

SL 1.2	• Aritmetické postupnosti a rady. • Vzorec pre n-tý člen a súčet prvých n členov. • Sigma zápis súčtov aritmetických postupností. • Aplikácie v modeloch, napríklad jednoduché úročenie. • - Aproximácia spoločného rozdielu pri reálnych modeloch, ktoré nie sú presne aritmetické.	Žiak vie: • určiť n-tý člen aritmetickej postupnosti. • vypočítať súčet prvých n členov. • používať sigma zápis pri súčtoch. • identifikovať prvý člen a spoločný rozdiel aj pri použití technológie. • modelovať situácie so zmenou po rovnakej prírastkovej hodnote. • interpretovať jednoduché úročenie v kontexte postupností. • - pracovať s približným modelom v reálnom živote, kde údaje nie sú presne aritmetické.
SL 1.3	• Geometrické postupnosti a rady. • Vzorec pre n-tý člen a súčet prvých n členov. • Sigma zápis súčtov geometrických postupností. • Aplikácie v modeloch šírenia, rastu a poklesu. • - Prepojenie na modely v téme funkcií a regresie.	Žiak vie: • určiť n-tý člen geometrickej postupnosti. • vypočítať súčet prvých n členov. • používať sigma zápis pri geometrických radoch. • identifikovať prvý člen a kvocient pri použití technológie. • aplikovať geometrické postupnosti na modely šírenia chorôb, rastu populácie, zvyšovania a znižovania miezd alebo fyzikálnych javov ako rádioaktívny rozpad. • - prepájať geometrické rady s exponenciálnymi modelmi.

SL 1.4	• Finančné aplikácie geometrických postupností a radov. • Zložené úročenie. • Ročná amortizácia. • Jednoduché úročenie ako úvod k zloženému úročeniu. • Výpočet reálnej hodnoty investície pri úrokovej miere a inflácii. • Úročenie ročne, polročne, štvrťročne alebo mesačne. • Použitie technológie vrátane finančných balíkov. • - Úvodný vzťah pre e cez limitný proces $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$.	Žiak vie: • vypočítať hodnotu investície pri zloženom úročení. • určiť zostatok pri amortizácii alebo úverových splátkach. • porovnať jednoduché a zložené úročenie. • zohľadniť infláciu pri reálnej hodnote investície. • pracovať s rôznou frekvenciou úročenia. • používať technológiu pri finančných výpočtoch. • - interpretovať výsledky v kontexte pôžičiek, investícií a úspor.
SL 1.5	• Mocninové zákony s celočíselnými exponentmi. • $5^3 \times 5^{-6} = 5^{-3}$. • $6^4 : 6^3 = 6$. • $(2^3)^{-4} = 2^{-12}$. • $(2x)^4 = 16x^4$. • $2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$. • Úvod do logaritmov so základom 10 a e. • $a^x = b \iff \log_a\ b = x$. • $b > 0$. • - $\log_e\ x = \ln\ x$.	• Žiak vie: • upravovať výrazy s celočíselnými exponentmi. • používať pravidlá exponentov v algebraických úpravách. • pochopiť logaritmus ako inverznú operáciu k exponenciálnej funkcii. • počítať a interpretovať logaritmy s využitím technológie. • prepájať exponenciálny a logaritmický zápis tej istej vzťahovej situácie. • - aplikovať logaritmy v kontextoch ako Richterova stupnica, decibely, pH alebo bufferové výpočty.

SL 1.6	• Jednoduchý deduktívny dôkaz, numerický aj algebraický. • Zápis rovnosti a identity. • Dôkaz zľava doprava $LHS \rightarrow RHS$. • - Kontrola výsledku.	• Žiak vie: • zostaviť jednoduchý deduktívny dôkaz. • používať symboly rovnosti a identity správne. • transformovať ľavú stranu výrazu na pravú pomocou známych algebraických krokov. • overiť výsledok vlastným kontrolným výpočtom. • zdôvodniť numerickú aj algebraickú rovnosť. • - pracovať s príkladmi typu $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$ alebo $(x-3)^2 + 5 \equiv x^2 - 6x + 14$.
SL 1.7	• Mocninové zákony s racionálnymi exponentmi. • $a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$. • Zákony logaritmov. • $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$. • $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$. • $\log_a (x^m) = m\log_a x$. • Zmena základu logaritmu $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. • - Riešenie exponenciálnych rovníc pomocou logaritmov.	• Žiak vie: • pracovať s racionálnymi exponentmi a odmocninami. • používať logaritmické zákony na zjednodušovanie výrazov. • meniť základ logaritmu podľa potreby. • riešiť exponenciálne rovnice aj pomocou logaritmov. • prepájať algebraický zápis s grafmi exponenciálnych a logaritmických funkcií. • - pracovať s príkladmi typu $\log_4 7 = \frac{\ln 7}{\ln 4}$ alebo $2^{x-1} = 10$.
SL 1.8	• Súčet nekonečnej geometrickej postupnosti. • Podmienka konvergencie	Žiak vie: • určiť, či geometrická postupnosť konverguje. • vypočítať súčet nekonečného geometrického radu. • - interpretovať význam konvergencie v kontexte nekonečných procesov.

SL 1.9	• Binomická veta pre rozvoj $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$. • Pascalov trojuholník. • Kombinačné čísla $\binom{n}{r}$. • - Počítanie koeficientov pomocou vzorca aj technológie.	Žiak vie: • rozvinúť binomický výraz. • používať binomickú vetu pri úprave výrazov. • pracovať s Pascalovým trojuholníkom. • určovať členy a koeficienty v rozvoji. • používať kombinatorické čísla pri výpočtoch. • - riešiť príklady typu hľadanie r, keď $\binom{6}{r} = 20$.

Rozširujúce učivo iba pre vyšší level (HL)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
AHL 1.10	• Kombinatorické princípy vrátane permutácií a kombinácií. • Rozšírenie binomickej vety na racionálne a záporné exponenty. $(a+b)^n, n \in \mathbb{Q}$.	Žiak vie: • riešiť kombinatorické úlohy s permutáciami a kombináciami. • používať rozšírený binomický rozvoj. • pracovať s aproximáciami, napríklad pri odhadoch $\sqrt{2}$. • - interpretovať veľké početnosti, napríklad v úlohách o lotérii.
AHL 1.11	• Čiastkové zlomky. • Rozklad racionálneho výrazu s najviac dvoma rôznymi lineárnymi činiteľmi v menovateli. • - Menší stupeň čitateľa než menovateľa.	Žiak vie: • rozložiť racionálny výraz na čiastkové zlomky. • použiť tento rozklad pri ďalších úpravách a výpočtoch. • - transformovať výraz do vhodnejšej podoby pri riešení úloh.
AHL 1.12	• Komplexné čísla i, kde $i^2 = -1$. • Kartézianska forma $z = a + bi$. • Reálna časť, imaginárna časť, komplexne združené číslo, modul, argument. • - Komplexná rovina, Argandov diagram.	Žiak vie: • reprezentovať komplexné čísla v kartézianskej rovine. • pracovať s reálnou a imaginárnou časťou. • interpretovať modul a argument. • - prepájať komplexné čísla s aplikáciami, napríklad v elektrickom inžinierstve.

AHL 1.13	• Modul-argumentová forma $z = r(\cos\ \theta + i\sin\ \theta) = rcis\theta$. • Eulerova forma $z = re^{i\theta}$. • - Sčítanie, násobenie a delenie v kartézianskej, polárnej a Eulerovej forme.	Žiak vie: • premieňať medzi kartézianskou, polárnou a Eulerovou formou. • používať tieto formy pri súčtoch, súčinoch a podieloch. • interpretovať geometrický význam zápisov. • - pracovať s príkladmi z elektrotechniky, napríklad fázový posun alebo účinník.
AHL 1.14	• Komplexne združené korene kvadratických a polynomiálnych rovníc s reálnymi koeficientmi. • De Moivreova veta a jej rozšírenie na racionálne exponenty. • - Mocniny a odmocniny komplexných čísel.	Žiak vie: • určovať komplexné korene polynómov. • používať vlastnosť združených koreňov. • aplikovať De Moivreovu vetu pri mocninách a odmocninách. • - prepájať komplexné čísla s trigonometriou a polynómami.
AHL 1.15	• Dôkaz matematickou indukciou. • Dôkaz sporom. • Protipríklad.	Žiak vie: • používať indukciu na dokazovanie tvrdení. • zostaviť dôkaz sporom. • použiť protipríklad na vyvrátenie nepravdivého tvrdenia. • - aplikovať tieto metódy na deliteľnosť, postupnosti, komplexné čísla a ďalšie tvrdenia.
AHL 1.16	• Sústavy lineárnych rovníc až s tromi neznámymi. • Algebraické a technologické riešenie. • Prípady s jedným riešením, nekonečne mnohými riešeniami alebo žiadnym riešením. • - Riešenie pomocou redukcie riadkov alebo matíc.	Žiak vie: • riešiť sústavy lineárnych rovníc viacerými metódami. • rozlíšiť typ riešenia sústavy. • používať technológiu alebo maticové metódy. • interpretovať neriešiteľnosť alebo nejednoznačnosť systému.

Spojená škola Pankúchova 6, Bratislava 5, 851 04

Tematický celok 2 — Funkcie (Functions)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
SL 2.1	• Rôzne tvary rovnice priamky. • Smernicová forma $y = mx + c$. • Všeobecný tvar $ax + by + d = 0$. • Bodovo-smernicový tvar $y - y_1 = m(x - x_1)$. • Smernica m. • Priesečníky s osami. • Podmienka rovnobežnosti $m_1 = m_2$. • - Podmienka kolmosti $m_1 \cdot m_2 = -1$.	Žiak vie: • určiť a používať rôzne tvary rovnice priamky. • vypočítať smernicu priamky z rovnice alebo z dvoch bodov. • určiť priesečníky s osami. • rozhodnúť, či sú dve priamky rovnobežné alebo kolmé. • modelovať sklon ciest, rámp alebo iných sklonených úsekov. • - prepájať analytický zápis priamky s geometrickým významom.
SL 2.2	• Pojem funkcie, definičný obor, obor hodnôt a graf. • Funkčná notácia $f(x)$, $v(t)$, $C(n)$. • Funkcia ako matematický model. • Inverzná funkcia ako opačná operácia k funkcii. • Zobrazenie inverznej funkcie ako osová súmernosť podľa priamky $y = x$. • - Notácia $f^{-1}(x)$.	Žiak vie: • rozpoznať funkciu ako vzťah medzi vstupom a výstupom. • určiť definičný obor a obor hodnôt. • používať funkčnú notáciu. • interpretovať funkciu ako model reálnej situácie. • určiť inverznú funkciu v jednoduchých prípadoch. • chápať vzťah medzi funkciou a jej inverziou ako zámenu vstupu a výstupu. • - riešiť úlohy typu $f(x) = 10$ a ekvivalentne $f^{-1}(10)$.
SL 2.3	• Graf funkcie a rovnica $y = f(x)$. • Náčrt grafu z údajov alebo kontextu. • Prenos grafu zo zariadenia na papier. • - Použitie technológie pri kreslení grafov vrátane súčtov a rozdielov funkcií.	Žiak vie: • načrtnúť graf funkcie podľa zadania alebo kontextu. • rozlíšiť, kedy má graf presne kresliť a kedy stačí náčrt. • označiť osi a významné body grafu. • preniesť informácie z obrazovky do grafu na papieri. • - používať technológiu na zobrazenie funkcií, ich súčtov a rozdielov.

SL 2.4	• Kľúčové vlastnosti grafov. • Maximum a minimum. • Priesečníky. • Symetria. • Vrchol. • Korene alebo nulové body. • Zvislé a vodorovné asymptoty. • - Priesečníky dvoch kriviek alebo priamok pomocou technológie.	Žiak vie: • určiť základné vlastnosti grafu. • nájsť maximá a minimá. • identifikovať priesečníky s osami aj medzi krivkami. • rozpoznať symetriu grafu. • určiť vrchol a nulové body. • nájsť asymptoty pomocou grafickej technológie. • - interpretovať graf v kontexte zadania.
SL 2.5	• Zložené funkcie $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. • Identická funkcia. • Inverzná funkcia $f^{-1}(x)$. • Vzťah $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$. • - Existencia inverznej funkcie pre prosté funkcie.	Žiak vie: • vytvárať zložené funkcie. • určiť identickú funkciu. • nájsť inverznú funkciu pre jednoduché prípady. • overiť, že zloženie funkcie a jej inverzie dáva pôvodnú hodnotu. • - pracovať s funkčnými vzťahmi pri riešení úloh.
SL 2.6	• Kvadratická funkcia $f(x) = ax^2 + bx + c$. • Graf kvadratickej funkcie. • y-priesečník $[0; c]$. • Os symetrie. • Tvar $f(x) = a(x - p)(x - q)$. • x-priesečníky $[p; 0]$, $[q; 0]$. • Tvar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. • - Vrchol $[h; k]$.	Žiak vie: • zapísať kvadratickú funkciu v rôznych tvaroch. • nájsť y-priesečník, x-priesečníky, os symetrie a vrchol. • prepisovať medzi kanonickým, rozloženým a vrcholovým tvarom. • čítať vlastnosti paraboly z jej rovnice alebo grafu. • - aplikovať kvadratickú funkciu v kontextoch pohybu alebo modelovania.
SL 2.7	• Riešenie kvadratických rovníc a nerovníc. • Kvadratický vzorec. • Faktorizácia. • Doplnenie na štvorec. • Diskriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. • - Počet a typ koreňov.	Žiak vie: • riešiť kvadratické rovnice a nerovnice viacerými metódami. • použiť kvadratický vzorec. • použiť faktorizáciu a doplnenie na štvorec. • určiť diskriminant a z neho počet a typ koreňov. • - interpretovať riešenia v reálnom kontexte.

SL 2.8	• Reciproká funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. • Jej graf a samoinverznosť. • Racionálne funkcie tvaru $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. • - Zvislé a vodorovné asymptoty.	Žiak vie: • načrtnúť graf reciprokej funkcie. • určiť jej asymptoty a priesečníky, ak existujú. • pracovať s racionálnymi funkciami jednoduchého tvaru. • rozpoznať samoinverznú vlastnosť reciprokej funkcie. • - využívať asymptoty pri interpretácii grafu.
SL 2.9	• Exponenciálne funkcie $f(x) = a^x$, $a > 0$, a $f(x) = e^x$. • Logaritmické funkcie $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, a $f(x) = \ln x$, $x > 0$. • Vzťah $a^x = e^{x \ln a}$. • Vzťah $\log_a (a^x) = x$. • - Exponenciálna a logaritmická funkcia ako inverzné funkcie.	Žiak vie: • rozpoznať a načrtnúť exponenciálne a logaritmické funkcie. • určiť ich základné vlastnosti. • chápať ich ako inverzné funkcie. • prepájať grafy s finančnými, biologickými a fyzikálnymi modelmi. • - interpretovať exponenciálny rast a pokles v kontexte úlohy.
SL 2.10	• Riešenie rovníc graficky aj analyticky. • Použitie technológie na riešenie rovníc bez vhodného analytického postupu. • - Rovnica pre reálne kontexty.	Žiak vie: • riešiť rovnice graficky aj algebraicky. • použiť technológiu pri rovniciach, ktoré sa nedajú ľahko riešiť presne. • interpretovať riešenia v kontexte reálnych situácií. • - pracovať s rovnicami typu $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ alebo $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$.
SL 2.11	• Transformácie grafov. • Translácie $y = f(x) + b$, $y = f(x - a)$. • Zrkadlenie podľa osí $y = -f(x)$, $y = f(-x)$. • Zvislé natiahnutie $y = pf(x)$. • Vodorovné natiahnutie $y = f(qx)$. • - Zložené transformácie.	Žiak vie: • aplikovať posuny, zrkadlenia a natiahnutia grafov. • určiť vplyv parametrov na graf funkcie. • postupovať správne pri poradí transformácií. • - náčrtom meniť graf funkcie podľa zadaného predpisu.

Rozširujúce učivo iba pre vyšší level (HL)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
AHL 2.12	• Polynomické funkcie, ich grafy a rovnice. • Nuly, korene a činitele. • Vietove vzťahy. • - Faktorová a zvyšková veta.	Žiak vie: • analyzovať polynóm podľa jeho grafu a rovnice. • určovať nuly, korene a činitele. • používať faktorovú a zvyškovú vetu. • - pracovať so súčtom a súčinom koreňov polynómu.
AHL 2.13	• Racionálne funkcie tvaru $f(x) = \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$. • Racionálne funkcie tvaru $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$. • - Vodorovné, zvislé a šikmé asymptoty.	Žiak vie: • analyzovať racionálne funkcie vyššieho typu. • určiť všetky druhy asymptot. • náčrtom alebo technológiou skúmať správanie funkcie. • - rozpoznať recipročnú funkciu ako osobitný prípad.
AHL 2.14	• Nepárne a párne funkcie. • Periodické funkcie. • Inverzná funkcia vrátane obmedzenia definičného oboru. • - Samoinverzné funkcie.	Žiak vie: • rozlíšiť párnu a nepárnu funkciu. • pracovať s periodickými funkciami. • nájsť inverznú funkciu aj pri obmedzení definičného oboru. • - rozpoznať samoinverzné funkcie.
AHL 2.15	• Riešenia nerovností $g(x) \geq f(x)$. • - Grafické aj algebraické metódy pre polynómy do stupňa 3.	Žiak vie: • riešiť nerovnosti pomocou grafu aj algebraicky. • používať technológiu pri presnejších alebo zložitejších funkciách. • - interpretovať výsledok ako množinu riešení v intervale.
AHL 2.16	• Grafy funkcií $y = \lvert f(x) \rvert$, • $y = f(\lvert x \rvert), y = f(ax + b)$, • $y = [f(x)]^2, y = \frac{1}{f(x)}$ • Riešenie rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou	Žiak vie: • meniť graf funkcie pomocou absolútnej hodnoty a ďalších transformácií. • riešiť rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou. • - používať grafickú kalkulačku na skúmanie týchto vzťahov.

Spojená škola Pankúchova 6, Bratislava 5, 851 04

Tematický celok 3 — Geometria a trigonometria (Geometry and trigonometry)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
SL 3.1	• Vzdialenosť dvoch bodov v trojrozmernom priestore. • Stred úsečky v trojrozmernom priestore. • Povrch a objem trojrozmerných telies vrátane kolmého ihlana, kolmého kužeľa, gule, pologule a zloženej zloženiny týchto telies. • - Uhol medzi dvoma pretínajúcimi sa priamkami alebo medzi priamkou a rovinou.	Žiak vie: • určiť vzdialenosť dvoch bodov v 3D priestore. • vypočítať stred úsečky v 3D priestore. • používať vzorce na objem a povrch telies. • identifikovať vhodné pravouhlé trojuholníky v telese. • určiť neznáme dĺžky a uhly v trojrozmerných úlohách. • - aplikovať výpočty na situácie z architektúry, dizajnu alebo fyziky.
SL 3.2	• Pravouhlá trigonometria. • Pomery sínus, kosínus a tangens v pravouhlom trojuholníku. • Sínusová veta $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. • Kosínusová veta $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. • - Obsah trojuholníka $\frac{1}{2}ab\sin C$.	Žiak vie: • určiť strany a uhly v pravouhlom trojuholníku pomocou trigonometrických pomerov. • používať sinovú a kosínusovú vetu pri riešení trojuholníkov. • vypočítať obsah trojuholníka pomocou goniometrického vzťahu. • kresliť a označovať pomocné náčrty na podporu riešenia. • - riešiť úlohy z triangulácie, mapovania a navigácie.
SL 3.3	• Aplikácie pravouhlej aj nepravouhlej trigonometrie. • Pytagorova veta. • Uhol výškový a hĺbkový. • - Názorné diagramy z textového zadania.	Žiak vie: • aplikovať trigonometrické vzťahy v praktických situáciách. • riešiť úlohy na výšku, vzdialenosť a sklon. • používať Pytagorovu vetu v trojrozmerných aj rovinných úlohách. • vytvárať presne označené náčrty podľa slovného zadania. • - interpretovať výsledky v kontextoch navigácie, merania alebo fyziky.

SL 3.4	• Kružnica. • Oblúková miera uhla. • Dĺžka oblúka. • - Obsah výseku kruhu.	Žiak vie: • prevádzať a používať oblúkovú mieru uhla. • počítať dĺžku oblúka. • vypočítať obsah výseku kruhu. • pracovať s presnými aj aproximatívnymi hodnotami uhla. • - interpretovať radiány v kontexte pohybu, kruhových dejov alebo fyziky.
SL 3.5	• Definícia $\sin\ \theta$ a $\cos\ \theta$ na jednotkovej kružnici. • Vzťahy medzi uhlami v rôznych kvadrantoch. • Definícia $\tan\ \theta = \frac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}$. • Rovnica priamky cez počiatok $y = x\tan\ \theta$. • Presné hodnoty goniometrických funkcií pre $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ a ich násobky. • - Rozšírenie sinovej vety na nejednoznačný prípad.	Žiak vie: • používať jednotkovú kružnicu na určenie hodnôt sínusu, kosínusu a tangensu. • rozpoznať správanie trigonometrických funkcií v rôznych kvadrantoch. • používať presné hodnoty štandardných uhlov. • - prepájať goniometrické hodnoty s geometrickým významom uhla.
SL 3.6	• Pytagorova identita $\cos^2\ \theta + \sin^2\ \theta = 1$. • Dvojnásobné uhly pre sínus a kosínus. • - Vzťahy medzi goniometrickými funkciami.	Žiak vie: • používať Pytagorovu identitu pri úpravách výrazov. • odvodzovať alebo používať vzorce pre dvojnásobný uhol. • určovať neznáme trigonometrické hodnoty z daného údaja. • - prepájať trigonometrické identity s grafickým zobrazením.
SL 3.7	• Goniometrické funkcie $\sin\ x$, $\cos\ x$, $\tan\ x$. • Amplitúda, periodicita a grafy. • Zložené funkcie tvaru $f(x) = a\sin\ (b(x + c)) + d$. • Transformácie goniometrických grafov. • - Reálne aplikácie, napríklad príliv, pohyb na ruskom kole.	Žiak vie: • načrtnúť a interpretovať grafy goniometrických funkcií. • určiť amplitúdu, periódu a posuny grafu. • modelovať periodické javy pomocou goniometrických funkcií. • aplikovať transformácie na trigonometrické grafy. • - čítať parametre z predpisu funkcie.

SL 3.8	• Riešenie trigonometrických rovníc v konečnom intervale. • Grafické aj analytické riešenie. • Rovníce vedúce na kvadratické rovnice v $\sin\ x$, $\cos\ x$ alebo $\tan\ x$. • - Riešenie na zadanom intervale.	Žiak vie: • riešiť trigonometrické rovnice v obmedzenom intervale. • používať grafické aj algebraické metódy. • riešiť rovnice, ktoré sa dajú previesť na kvadratický tvar v goniometrických funkciách. • - interpretovať riešenia vzhľadom na interval a kontext úlohy.

Rozširujúce učivo iba pre vyšší level (HL)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
AHL 3.9	• Reciproké goniometrické funkcie $\sec\ \theta$, , $\cot\ \theta$. • Pytagorejské identity $1 + \tan^2\ \theta = \sec^2\ \theta$, . • Inverzné funkcie $\arcsin\ x$, $\arccos\ x$, $\arctan\ x$. • - Definičné obory a obory hodnôt inverzných funkcií.	Žiak vie: • používať recipročné goniometrické funkcie. • pracovať s identitami pre sekans, kosekans a kotangens. • určiť a interpretovať inverzné goniometrické funkcie. • - rozlišovať ich definičný obor a obor hodnôt.
AHL 3.10	• Súčtové vzorce pre uhly. • Dvojnásobný uhol pre tangens. • - Odvodenie dvojnásobných uhlov zo súčtových vzorcov.	Žiak vie: • používať vzorce pre súčet a rozdiel uhlov. • odvodiť vzorec pre dvojnásobný uhol. • - aplikovať tieto vzorce pri úpravách a riešení trigonometrických úloh.
AHL 3.11	• Symetrické vlastnosti goniometrických funkcií. • - Vzťahy $\sin\ (\pi - \theta) = \sin\ \theta$, $\cos\ (\pi - \theta) = -\cos\ \theta$, $\tan\ (\pi - \theta) = -\tan\ \theta$.	Žiak vie: • využívať symetriu grafov goniometrických funkcií. • prepájať algebraické vzťahy s grafickým správaním funkcií. • - používať symetrické vlastnosti pri riešení rovníc a identít.

AHL 3.12	• Vektor ako orientovaná úsečka. • Polohový vektor a posunový vektor. • Zložky vektora a bázy **i**, **j**, **k**. • Súčet, rozdiel a násobenie skalárom. • Dĺžka vektora. • Jednotkový vektor. • - Vzdialenosť medzi bodmi pomocou vektora.	Žiak vie: • reprezentovať vektory geometricky aj algebraicky. • pracovať so zložkami vektorov. • sčítať a odčítavať vektory. • násobiť vektor skalárom. • určovať dĺžku vektora a jednotkový vektor. • - používať vektory na opis polohy a posunu v priestore.
AHL 3.13	• Skalárny súčin dvoch vektorov. • Uhol medzi vektormi. • Kolmé a rovnobežné vektory. • Vzťahy: $v \cdot w = w \cdot v$; • $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$; • $(kv) \cdot w = k(v \cdot w)$; • $v \cdot v = v^2$. • $v \cdot w = \|v\| \, w\|\cos\theta$	Žiak vie: • vypočítať skalárny súčin vektorov. • určiť uhol medzi vektormi. • rozpoznať kolmosť a rovnobežnosť vektorov. • - aplikovať skalárny súčin v geometrických úlohách
AHL 3.14	• Vektorová rovnica priamky v 2D a 3D. • Parametrický tvar. • Kartézsky tvar priamky. • Uhol medzi dvoma priamkami. • - Jednoduché aplikácie na kinematiku.	Žiak vie: • zapísať priamku vektorovou, parametrickou aj kartézskou formou. • určiť uhol medzi priamkami. • interpretovať parametre v kontexte pohybu. • - používať vektorové metódy pri modelovaní priamok.
AHL 3.15	• Totožné, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky. • - Body priesečníka.	Žiak vie: • rozlišovať rôzne vzájomné polohy priamok v priestore. • určiť priesečníky, ak existujú. • - chápať mimobežné priamky ako nerovnobežné priamky v 3D, ktoré sa nepretínajú.

Spojená škola Pankúchova 6, Bratislava 5, 851 04

Tematický celok 4 — Štatistika a pravdepodobnosť (Statistics and probability)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
SL 4.1	• Pojmy populácia, vzorka, náhodná vzorka, diskrétne a spojité údaje. • Spoľahlivosť zdrojov údajov a skreslenie pri výbere vzorky. • Práca s chýbajúcimi údajmi a chybami pri zaznamenávaní údajov. • Interpretácia odľahlých hodnôt. • Odľahlá hodnota je údaj, ktorý je vzdialený viac ako $1.5 \times IQR$ od najbližšieho kvartilu. • Uvedomenie si, že niektoré odľahlé hodnoty môžu byť prirodzenou súčasťou vzorky a iné môžu predstavovať chybu. • Väzba na krabicové diagramy (SL4.2) a miery variability (SL4.3). • Výberové techniky a ich účinnosť. • - Jednoduchý náhodný výber, príležitostný výber, systematický výber, kvótny výber a stratifikovaný výber.	Žiak vie: • rozlišovať medzi populáciou a vzorkou. • rozlišovať náhodnú vzorku, diskrétne údaje a spojité údaje. • posúdiť spoľahlivosť zdrojov údajov. • identifikovať možné skreslenie pri výbere vzorky. • pracovať s chýbajúcimi údajmi a rozpoznať chyby pri zaznamenávaní údajov. • určiť a interpretovať odľahlé hodnoty. • používať pravidlo odľahlej hodnoty $1.5 \times IQR$. • posúdiť, či je odľahlá hodnota v kontexte relevantná alebo chybná. • rozlišovať jednotlivé výberové techniky. • - posúdiť vhodnosť výberovej techniky pre daný súbor údajov.

SL 4.2	• Prezentácia diskrétnych a spojitých údajov pomocou frekvenčných rozdelení v tabuľkách. • Triedne intervaly sú zadané ako nerovnosti bez medzier. • Histogramy. • Kumulatívna početnosť. • Kumulatívne grafy. • Použitie kumulatívnych grafov na určenie mediánu, kvartilov, percentilov, variačného rozpätia a medzikvartilového rozpätia. • Histogramy s rovnakými triednymi intervalmi. • Histogramy s frekvenčnou hustotou sa nevyžadujú. • Tvorba a interpretácia krabicových diagramov. • Porovnávanie dvoch rozdelení pomocou symetrie, mediánu, medzikvartilového rozpätia a variačného rozpätia. • Odľahlé hodnoty sa v krabicovom diagrame označujú krížikom. • - Posudzovanie, či údaje môžu mať normálne rozdelenie podľa symetrie boxu a „fúzov“.	Žiak vie: • usporiadať diskrétne a spojité údaje do frekvenčných tabuliek. • pracovať s triednymi intervalmi zadanými pomocou nerovníc. • zostrojiť histogram s rovnakými triednymi intervalmi. • zostrojiť a interpretovať kumulatívny graf. • určiť z kumulatívneho grafu medián, kvartily, percentily, variačné rozpätie a medzikvartilové rozpätie. • zostrojiť a interpretovať krabicový diagram. • porovnať dve rozdelenia údajov pomocou krabicových diagramov. • označiť odľahlé hodnoty v krabicovom diagrame. • posúdiť symetriu rozdelenia údajov. • - odhadnúť, či sú údaje približne normálne rozdelené.

SL 4.3	• Miery centrálnej tendencie: aritmetický priemer, medián a modus. • Výpočet aritmetického priemeru pomocou vzorca a technológií. • Odhad aritmetického priemeru zo skupinových údajov. • Pri odhade priemeru zo skupinových údajov sa používajú stredy intervalov. • Modálna trieda. • Modálna trieda sa určuje len pri rovnakých triednych intervaloch. • Miery variability: medzikvartilové rozpätie, smerodajná odchýlka a rozptyl. • Výpočet smerodajnej odchýlky a rozptylu vzorky iba pomocou technológií. • Rozptyl je druhá mocnina smerodajnej odchýlky. • Vplyv konštantných zmien na pôvodné údaje. • Príklad: Ak sa od každého údaja odčíta 3, aritmetický priemer sa zmenší o 3, ale smerodajná odchýlka sa nezmení. • Príklad: Ak sa všetky údaje zdvojnásobia, aritmetický priemer aj smerodajná odchýlka sa zdvojnásobia. • Kvartily diskrétnych údajov. • Kvartily diskrétnych údajov sa určujú pomocou technológií. • - Existujú rôzne metódy určovania kvartilov, preto sa výsledky získané technológiou a ručne môžu líšiť.	Žiak vie: • určiť a interpretovať aritmetický priemer, medián a modus. • vypočítať aritmetický priemer pomocou vzorca aj technológií. • odhadnúť aritmetický priemer zo skupinových údajov pomocou stredov intervalov. • určiť modálnu triedu pri rovnakých triednych intervaloch. • určiť a interpretovať medzikvartilové rozpätie. • určiť smerodajnú odchýlku a rozptyl pomocou technológií. • vysvetliť vzťah medzi rozptylom a smerodajnou odchýlkou. • analyzovať vplyv lineárnych zmien údajov na priemer a smerodajnú odchýlku. • určiť kvartily diskrétnych údajov pomocou technológií. • - uvedomiť si, že rôzne postupy určovania kvartilov môžu viesť k odlišným výsledkom.

SL 4.4	• Lineárna korelácia dvojrozmerných údajov. • Pearsonov korelačný koeficient r. • Hodnota r sa určuje pomocou technológií. • Ručný výpočet r môže podporiť porozumenie. • Kritické hodnoty r budú zadané tam, kde je to potrebné. • Pearsonov korelačný koeficient r má význam iba pri lineárnych vzťahoch. • Bodové diagramy. • Priamka najlepšieho priblíženia určená odhadom a vedená bodom priemerov. • Kladná, nulová a záporná korelácia. • Silná, slabá a žiadna korelácia. • Rozlišovanie medzi koreláciou a kauzalitou. • Korelácia neimplikuje príčinnosť. • Rovnica regresnej priamky y na x. • Rovnica sa určuje pomocou technológií. • Použitie regresnej priamky na predikciu. • Interpretácia parametrov a a b v lineárnej regresii $y = ax + b$. • Riziká extrapolácie. • - Pri použití regresnej priamky y na x nemožno vždy spoľahlivo určiť x zo zadanej hodnoty y.	Žiak vie: • zostrojiť a interpretovať bodový diagram. • určiť Pearsonov korelačný koeficient r pomocou technológií. • interpretovať silu a smer lineárnej korelácie. • rozlišovať kladnú, nulovú a zápornú koreláciu. • rozlišovať silnú, slabú a žiadnu koreláciu. • rozlišovať medzi koreláciou a príčinnosťou. • vysvetliť, že korelácia sama osebe neznamená kauzalitu. • určiť priamku najlepšieho priblíženia odhadom cez bod priemerov. • určiť rovnicu regresnej priamky y na x pomocou technológií. • interpretovať význam parametrov a a b v modeli $y = ax + b$. • používať regresnú priamku na predikciu. • posúdiť nebezpečenstvo extrapolácie. • - uvedomiť si obmedzenia predikcie hodnoty x zo zadanej hodnoty y pri použití priamky y na x.

SL 4.5	• Pojmy pokus, výsledok, rovnako pravdepodobné výsledky, relatívna početnosť, priestor javov U a jav. • Pravdepodobnosť javu A je $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$. • Doplnkové javy A a A'. • Priestor javov možno znázorniť rôznymi spôsobmi, napríklad tabuľkou alebo zoznamom. • Pokusy s mincami, kockami, kartami a podobne podporujú porozumenie rozdielu medzi experimentálnou a teoretickou pravdepodobnosťou. • Na podporu učenia možno používať simulácie. • Očakávaný počet výskytov. • - Príklad: Ak je v triede 128 žiakov a pravdepodobnosť neprítomnosti je 0,1, očakávaný počet neprítomných žiakov je 12,8.	Žiak vie: • používať základné pojmy teórie pravdepodobnosti. • určiť priestor javov jednoduchého pokusu. • vypočítať pravdepodobnosť javu pomocou vzťahu $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$. • rozlišovať teoretickú pravdepodobnosť a experimentálnu pravdepodobnosť. • pracovať s doplnkovým javom. • vytvoriť reprezentáciu priestoru javov tabuľkou alebo zoznamom. • využiť jednoduché experimenty a simulácie na overovanie pravdepodobnostných úvah. • - určiť očakávaný počet výskytov v danom kontexte.

SL 4.6	• Použitie Vennových diagramov, stromových diagramov, diagramov priestoru javov a tabuliek výsledkov na výpočet pravdepodobností. • Zložené javy: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. • Vzájomne sa vylučujúce javy: $P(A \cap B) = 0$. • Podmienená pravdepodobnosť: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. • Alternatívny tvar: $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$. • Pravdepodobnosti s vrátením a bez vrátenia. • - Nezávislé javy: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Žiak vie: • používať Vennove diagramy, stromové diagramy, diagramy priestoru javov a tabuľky výsledkov pri výpočte pravdepodobností. • vypočítať pravdepodobnosť zložených javov pomocou vzťahu $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. • určiť, kedy sú javy vzájomne sa vylučujúce, a používať vzťah $P(A \cap B) = 0$. • chápať nevýlučný význam spojky „alebo“. • vypočítať podmienenú pravdepodobnosť pomocou vzťahu $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. • používať aj alternatívny tvar $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$. • riešiť úlohy pomocou diagramov a tabuliek aj bez explicitného použitia vzorcov. • riešiť úlohy s výberom s vrátením aj bez vrátenia. • - určiť, kedy sú javy nezávislé, a používať vzťah $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
SL 4.7	• Pojem diskrétnej náhodnej premennej a jej pravdepodobnostného rozdelenia. • Očakávaná hodnota (stredná hodnota) pre diskrétne údaje. • Aplikácie. • Pravdepodobnostné rozdelenie môže byť zadané tabuľkou, napríklad: $X = 1,2,3,4,5$ a $P(X = x) = 0.1,0.2,0.15,0.05,0.5$. • Pravdepodobnostné rozdelenie môže byť zadané vzťahom $P(X = x) = \frac{1}{18}(4 + x)$ pre $x \in \{1,2,3\}$. • - $E(X) = 0$ označuje spravodlivú hru, ak X predstavuje zisk hráča.	Žiak vie: • rozpoznať diskrétnu náhodnú premennú. • čítať a interpretovať pravdepodobnostné rozdelenie diskrétnej náhodnej premennej. • pracovať s rozdelením zadaným tabuľkou aj predpisom. • určiť očakávanú hodnotu diskrétnej náhodnej premennej. • interpretovať očakávanú hodnotu v kontexte úlohy. • - posúdiť, či je hra spravodlivá na základe podmienky $E(X) = 0$.

SL 4.8	• Binomické rozdelenie. • Situácie, v ktorých je binomické rozdelenie vhodným modelom. • Stredná hodnota a rozptyl binomického rozdelenia. • Pri skúškach sa binomické pravdepodobnosti určujú pomocou dostupných technológií. • Formálny dôkaz pre strednú hodnotu a rozptyl sa nevyžaduje. • - Väzba na očakávaný počet výskytov v sekcii SL4.5.	Žiak vie: • rozpoznať situácie, v ktorých je binomické rozdelenie vhodným modelom. • používať technológie na určovanie binomických pravdepodobností. • určiť a interpretovať strednú hodnotu binomického rozdelenia. • určiť a interpretovať rozptyl binomického rozdelenia. • - prepájať binomické rozdelenie s očakávaným počtom výskytov.
SL 4.9	• Normálne rozdelenie a normálna krivka. • Vlastnosti normálneho rozdelenia. • Diagramatické znázornenie. • Prirodzený výskyt normálneho rozdelenia. • Približne 68% údajov leží medzi $\mu \pm \sigma$. • Približne 95% údajov leží medzi $\mu \pm 2\sigma$. • Približne 99,7% údajov leží medzi $\mu \pm 3\sigma$. • Výpočty pravdepodobností pri normálnom rozdelení. • Pravdepodobnosti a hodnoty premennej sa určujú pomocou technológií. • Inverzné výpočty pri normálnom rozdelení. • Pri inverzných výpočtoch budú zadané priemer a smerodajná odchýlka. • Nevyžaduje sa transformácia na štandardizovanú normálnu premennú z.	Žiak vie: • rozpoznať normálne rozdelenie a jeho základné vlastnosti. • interpretovať normálnu krivku v kontexte. • používať pravidlo 68% – 95% – 99,7%. • určovať pravdepodobnosti pri normálnom rozdelení pomocou technológií. • vykonávať inverzné výpočty pri normálnom rozdelení pomocou technológií. • - pracovať s daným priemerom a smerodajnou odchýlkou bez nutnosti štandardizácie na z.

SL 4.10	• Rovnica regresnej priamky x na y. • Použitie rovnice na predikciu. • - Pri použití priamky x na y nemožno vždy spoľahlivo určiť y zo zadanej hodnoty x.	Žiak vie: • určiť rovnicu regresnej priamky x na y. • používať rovnicu na predikčné účely. • - posúdiť obmedzenia predikcie pri použití priamky x na y.
SL 4.11	• Formálna definícia a používanie vzťahov pre podmienené pravdepodobnosti: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. • - Formálna definícia a používanie vzťahov pre nezávislé javy: $P(A \mid B) = P(A) = P(A \mid B')$.	Žiak vie: • používať formálnu definíciu podmienenej pravdepodobnosti $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. • používať alternatívny tvar $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$. • používať formálnu definíciu nezávislých javov $P(A \mid B) = P(A) = P(A \mid B')$. • - testovať nezávislosť javov.
SL 4.12	• Štandardizácia normálnych premenných pomocou z-hodnôt. • Pravdepodobnosti a hodnoty premennej sa určujú pomocou technológií. • Štandardizovaná hodnota z udáva počet smerodajných odchýlok od priemeru. • Inverzné výpočty pri normálnom rozdelení, keď priemer alebo smerodajná odchýlka nie sú známe. • - Použitie z-hodnôt na výpočet neznámeho priemeru a neznámej smerodajnej odchýlky.	Žiak vie: • štandardizovať normálnu premennú pomocou z-hodnoty. • interpretovať význam z-hodnoty. • používať technológie pri výpočtoch súvisiacich s normálnym rozdelením. • - určiť neznámy priemer alebo smerodajnú odchýlku pomocou z-hodnôt.

Rozširujúce učivo iba pre vyšší level (HL)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
AHL 4.13	• Použitie Bayesovej vety najviac pre tri javy. • - Väzba na nezávislé javy v sekcii SL4.6.	Žiak vie: • používať Bayesovu vetu pri riešení pravdepodobnostných úloh. • aplikovať Bayesovu vetu pre najviac tri javy. • - prepájať Bayesovu vetu s pojmom nezávislých javov.
AHL 4.14	• Rozptyl diskrétnej náhodnej premennej. • Väzba na diskrétne náhodné premenné v sekcii SL4.7. • Spojité náhodné premenné a ich hustoty pravdepodobnosti. • $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. • Uvažujú sa aj funkcie definované po častiach. • Modus a medián spojitých náhodných premenných. • Modus je hodnota, v ktorej hustota pravdepodobnosti nadobúda maximum. • Pre medián platí $\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. • Stredná hodnota, rozptyl a smerodajná odchýlka diskrétnych aj spojitých náhodných premenných. • Použitie označení $E(X)$, $E(X^2)$, $Var(X)$. • $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. • Použitie $E(X)$ pri „spravodlivých“ hrách. • Vplyv lineárnych transformácií premennej X. • $E(aX + b) = aE(X) + b$. • - $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.	Žiak vie: • určiť rozptyl diskrétnej náhodnej premennej. • pracovať so spojitou náhodnou premennou a jej hustotou pravdepodobnosti. • používať podmienku $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. • pracovať aj s hustotami pravdepodobnosti definovanými po častiach. • určiť modus spojitej náhodnej premennej. • určiť medián spojitej náhodnej premennej pomocou vzťahu $\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. • používať označenia $E(X)$, $E(X^2)$ a $Var(X)$. • vypočítať rozptyl pomocou vzťahu $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. • určiť a interpretovať strednú hodnotu, rozptyl a smerodajnú odchýlku diskrétnych aj spojitých náhodných premenných. • používať očakávanú hodnotu pri posudzovaní spravodlivosti hry. • určiť vplyv lineárnej transformácie na očakávanú hodnotu a rozptyl. • - používať vzťahy $E(aX + b) = aE(X) + b$ a $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Spojená škola Pankúchova 6, Bratislava 5, 851 04

Tematický celok 5 — Diferenciálny a integrálny počet (Calculus)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
SL 5.1	• Úvod do pojmu limita. • - Derivácia interpretovaná ako funkcia smernice a ako miera zmeny.	Žiak vie: • odhadnúť hodnotu limity z tabuľky alebo z grafu. • chápať, že formálne analytické metódy výpočtu limit sa nevyžadujú. • interpretovať deriváciu ako smernicu funkcie a ako mieru zmeny. • používať označenia $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $\frac{dV}{dr}$, $\frac{ds}{dt}$ pre prvú deriváciu. • - chápať neformálne smernicu krivky ako limitu.
SL 5.2	• Rastúce a klesajúce funkcie. • - Grafická interpretácia $f'(x) > 0$, $f'(x) = 0$, $f'(x) < 0$.	• Žiak vie: • určiť intervaly, v ktorých funkcia rastie, ak $f'(x) > 0$. • určiť intervaly, v ktorých funkcia klesá, ak $f'(x) < 0$. • - graficky interpretovať význam znamienka prvej derivácie.
SL 5.3	• Derivácia funkcie $f(x) = ax^n$ je $f'(x) = anx^{n-1}$, kde $n \in \mathbb{Z}$. • - Derivácia funkcií tvaru $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$, kde všetky exponenty sú celé čísla.	• Žiak vie: • derivovať funkciu tvaru ax^n, kde n je celé číslo. • - derivovať polynomiálne funkcie, v ktorých sú všetky exponenty celé čísla.
SL 5.4	• - Dotyčnice a normály v danom bode a ich rovnice.	• Žiak vie: • určiť rovnicu dotyčnice v danom bode. • určiť rovnicu normály v danom bode. • - používať analytické postupy aj technológie.

SL 5.5	• Úvod do integrácie ako antidiferenciácie funkcií tvaru $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$, kde $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$. • Antidiferenciácia s okrajovou podmienkou na určenie integračnej konštanty. • Určité integrály pomocou technológií. • - Obsah oblasti ohraničenej krivkou $y = f(x)$ a osou x, kde $f(x) > 0$.	• Žiak vie: • chápať integráciu ako antidiferenciáciu. • uvedomiť si vzťah medzi primitívnou funkciou, určitým integrálom a obsahom. • určiť primitívnu funkciu s využitím okrajovej podmienky. • vypočítať určitý integrál pomocou technológií. • zostaviť správny integrálny výraz pre obsah oblasti pred samotným výpočtom. • - určiť obsah oblasti ohraničenej grafom funkcie a osou x, ak $f(x) > 0$.
SL 5.6	• Derivácia x^n $(n \in \mathbb{Q})$, $\sin x$, $\cos x$, e^x a $\ln x$. • Derivovanie súčtu a násobku týchto funkcií. • Reťazové pravidlo pre zložené funkcie. • - Pravidlo pre deriváciu súčinu a podielu.	• Žiak vie: • derivovať funkcie x^n, $\sin x$, $\cos x$, e^x a $\ln x$. • derivovať súčet a násobok týchto funkcií. • používať reťazové pravidlo pri zložených funkciách. • - používať pravidlo pre deriváciu súčinu a podielu.
SL 5.7	• Druhá derivácia. • - Grafické správanie funkcií vrátane vzťahu medzi grafmi f, f' a f''.	• Žiak vie: • používať označenia $\frac{d^2y}{dx^2}$ a $f''(x)$. • určiť druhú deriváciu funkcie. • interpretovať vzťah medzi grafmi funkcie, jej prvej a druhej derivácie. • - používať technológie na skúmanie grafov a výpočet derivácií.

SL 5.8	• Lokálne maximá a minimá. • Testovanie maxima a minima. • Optimalizácia. • - Body inflexie s nulovou aj nenulovou smernicou.	• Žiak vie: • určiť lokálne maximum a minimum funkcie. • testovať maximum a minimum pomocou zmeny znamienka prvej derivácie. • testovať maximum a minimum pomocou druhej derivácie, kde $f''(x) > 0$ znamená minimum a $f''(x) < 0$ znamená maximum. • riešiť jednoduché optimalizačné úlohy. • určiť bod inflexie ako bod, v ktorom $f''(x) = 0$ a zároveň sa mení znamienko druhej derivácie. • uvedomiť si, že samotná podmienka $f''(x) = 0$ nie je postačujúca pre bod inflexie, napríklad pri $y = x^4$ v bode $(0,0)$. • - používať pojmy „konvexná“ pre $f''(x) > 0$ a „konkávna“ pre $f''(x) < 0$.
SL 5.9	• - Kinematické úlohy zahŕňajúce posunutie s, rýchlosť v, zrýchlenie a a celkovú prejdenú dráhu.	• Žiak vie: • používať vzťah $v = \frac{ds}{dt}$. • používať vzťah $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. • určiť posunutie od t_1 do t_2 pomocou $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$. • určiť dráhu od t_1 do t_2 pomocou $\int_{t_1}^{t_2} \lvert v(t)\rvert\,dt$. • - chápať, že rýchlosť je veľkosť velocity/vektorovej rýchlosti.

SL 5.10	• Neurčitý integrál x^n $(n \in \mathbb{Q})$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{x}$ a e^x. • Zložené funkcie ľubovoľnej z týchto funkcií s lineárnou funkciou $ax + b$. • - Integrácia rozpoznaním tvaru alebo substitúciou pre výrazy tvaru $\int kg'(x)f(g(x))\,dx$.	• Žiak vie: • integrovať funkcie x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{x}$ a e^x. • používať vzťah $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$. • integrovať zložené funkcie s lineárnou vnútornou funkciou $ax + b$. • používať integráciu rozpoznaním tvaru. • - používať substitúciu pri integráloch tvaru $\int kg'(x)f(g(x))\,dx$.
SL 5.11	• Určité integrály vrátane analytického prístupu. • Obsahy oblastí ohraničených krivkou $y = f(x)$ a osou x, kde $f(x)$ môže byť kladná aj záporná, bez použitia technológií. • - Obsahy medzi krivkami.	• Žiak vie: • používať Newtonov-Leibnizov vzťah $\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$. • uvedomiť si, že niektoré určité integrály možno vypočítať len pomocou technológií. • zostaviť správny integrálny výraz pred samotným výpočtom obsahu. • určiť obsah oblasti medzi grafom funkcie a osou x, aj keď funkcia nadobúda kladné aj záporné hodnoty. • určiť obsah medzi dvoma krivkami. • - využívať technológie na lepšie pochopenie vzťahu medzi integrálmi a obsahmi.

Rozširujúce učivo iba pre vyšší level (HL)

Sekcia	Obsahový štandard	Výkonový štandard
AHL 5.12	• Neformálne porozumenie spojitosti a derivovateľnosti funkcie v bode. • Porozumenie limitám, konvergencii a divergencii. • Definícia derivácie z prvých princípov $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. • - Vyššie derivácie.	Žiak vie: • chápať neformálne spojitosť a derivovateľnosť funkcie v bode. • rozlišovať konvergenciu a divergenciu limitných procesov. • používať definíciu derivácie z prvých princípov pri polynómoch. • - používať označenia $\frac{d^n y}{dx^n}$ a $f^{(n)}(x)$.
AHL 5.13	• Vyhodnocovanie limit tvaru $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ pomocou l'Hôpitalovho pravidla alebo Maclaurinovho radu. • - Opakované použitie l'Hôpitalovho pravidla.	Žiak vie: • určovať limity tvaru $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. • používať l'Hôpitalovo pravidlo. • používať Maclaurinov rad pri určovaní limit. • - používať l'Hôpitalovo pravidlo aj opakovane, keď je to potrebné.
AHL 5.14	• Implicitná derivácia. • Súvisiace rýchlosti zmien. • - Optimalizačné úlohy.	Žiak vie: • derivovať implicitne zadané vzťahy. • riešiť úlohy na súvisiace rýchlosti zmien. • riešiť optimalizačné úlohy s vhodným použitím reťazového pravidla alebo implicitnej derivácie. • - zohľadniť aj prípady, keď optimálne riešenie nastáva na kraji intervalu.

AHL 5.15	• Derivácie $\tan x$, $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$. • Neurčité integrály derivácií všetkých uvedených funkcií. • Zložené funkcie týchto funkcií s lineárnou funkciou. • - Použitie parciálnych zlomkov na úpravu integrandu.	Žiak vie: • derivovať uvedené goniometrické, exponenciálne, logaritmické a inverzné goniometrické funkcie. • integrovať derivácie týchto funkcií. • chápať neurčitý integrál ako rodinu funkcií. • integrovať zložené funkcie s lineárnym vnútorným predpisom. • - používať parciálne zlomky na úpravu integrandu pred integráciou.
AHL 5.16	• Integrácia substitúciou. • Integrácia po častiach. • - Opakovaná integrácia po častiach.	Žiak vie: • používať integráciu substitúciou. • uvedomiť si, že pri skúške bude substitúcia zadaná, ak integrál nie je tvaru $\int kg'(x)f(g(x))dx$. • používať integráciu po častiach. • - používať opakovanú integráciu po častiach.
AHL 5.17	• Obsah oblasti ohraničenej krivkou a osou y v danom intervale. • - Objem rotačných telies okolo osi x alebo osi y.	Žiak vie: • určiť obsah oblasti ohraničenej krivkou a osou y. • určiť objem rotačného telesa pri rotácii okolo osi x. • - určiť objem rotačného telesa pri rotácii okolo osi y.

AHL 5.18	• Diferenciálne rovnice prvého rádu. • Numerické riešenie $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ pomocou Eulerovej metódy. • Separovateľné premenné. • Homogénna diferenciálna rovnica $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ so substitúciou $y = vx$. • - Riešenie $y' + P(x)y = Q(x)$ pomocou integračného faktora.	Žiak vie: • riešiť jednoduché diferenciálne rovnice prvého rádu. • používať Eulerovu metódu a vzťah $x_{n+1} = x_n + h$, kde h je konštanta. • riešiť diferenciálne rovnice so separovateľnými premennými. • riešiť homogénne diferenciálne rovnice pomocou substitúcie $y = vx$. • - riešiť lineárne diferenciálne rovnice tvaru $y' + P(x)y = Q(x)$ pomocou integračného faktora.
AHL 5.19	• Maclaurinov rad na získanie rozvojov pre e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^p$, kde $p \in \mathbb{Q}$. • Použitie jednoduchej substitúcie, súčinov, integrácie a derivácie na získanie ďalších radov. • - Maclaurinove rady odvodené z diferenciálnych rovníc.	Žiak vie: • zostaviť Maclaurinove rady pre uvedené funkcie. • používať jednoduchú substitúciu na získanie ďalších radov. • používať súčiny, integráciu a deriváciu pri tvorbe ďalších radov. • - pracovať s Maclaurinovými radmi odvodenými z diferenciálnych rovníc.

Poznámky

Rozsah obsahu predmetu **Matematika: analýza a prístupy (Mathematics: analysis and approaches)** na **štandardnej úrovni (SL)** a **vyššej úrovni (HL)** v jednotlivých ročníkoch (I. DP, II. DP) si vyučujúci prispôsobuje podľa aktuálnych vzdelávacích potrieb žiakov, požiadaviek študijného programu a časových možností. Pri 45-minútových vyučovacích hodinách predstavuje odporúčaný rozsah výučby **200 vyučovacích hodín** na štandardnej úrovni (SL) a **320 vyučovacích hodín** na vyššej úrovni (HL).

Súčasťou výučby predmetu **Matematika: analýza a prístupy (Mathematics: analysis and approaches)** je aj systematická príprava žiakov na **výskumnú prácu z matematiky (mathematical exploration)**, ktorý predstavuje interné hodnotenie predmetu a tvorí 20% z jeho celkového hodnotenia.

Zvyšných 80% hodnotenia tvorí externá skúška. Na **štandardnej úrovni (SL)** pozostáva z dvoch častí: **Písomná skúška 1 (Paper 1)** a **Písomná skúška 2 (Paper 2)**. Na **vyššej úrovni (HL)** pozostáva z troch častí: **Písomná skúška 1 (Paper 1)**, **Písomná skúška 2 (Paper 2)** a **Písomná skúška 3 (Paper 3)**.

Písomná skúška 1 (Paper 1) sa vypracúva bez použitia technológií / kalkulačky, zatiaľ čo pri **Písomnej skúške 2 (Paper 2)** a na vyššej úrovni (HL) aj pri **Písomnej skúške 3 (Paper 3)** je použitie technológií /grafickej kalkulačky povolené.

Významnou súčasťou vyučovania predmetu je systematická práca s technológiami, predovšetkým s **grafickou kalkulačkou,** keďže sylabus vo viacerých tematických oblastiach odporúča alebo priamo predpokladá využívanie grafických kalkulačiek, grafických softvérov a ďalších digitálnych nástrojov pri skúmaní funkcií, grafov, modelov, štatistických údajov a pri riešení matematických problémov.

Spracovala:

Monika Opatovská